Cálculo 3A – EP9 – Integral de linha de campo vetorial. Campos conservativos – Gabarito

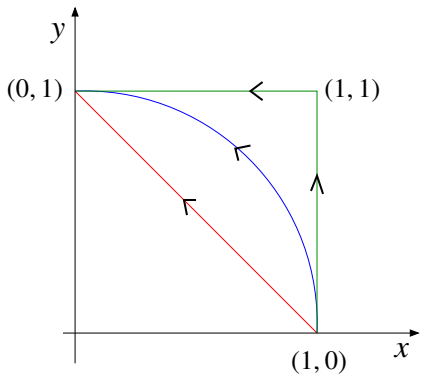
Exercício 1: Calcule a integral de linha $\int_C y\,dx + (x+2y)\,dy$ de $(1,0)$ a $(0,1)$, onde C é:

a) o segmento de reta;

b) o arco de circunferência $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$;

c) a poligonal de $(1,0)$ a $(1,1)$ a $(0,1)$.

Solução: Temos o esboço na figura a seguir.



a) A equação do segmento é $x+y=1$ com $0 \le y \le 1$. Fazendo $y = t$ temos $x = 1-t$ com $0 \le t \le 1$. Logo, $dy = dt$ e $dx = -dt$. Então:

$$\begin{aligned}\int_C y\,dx + (x+2y)\,dy &= \int_0^1 t\,(-dt) + (1-t+2t)\,dt = \int_0^1 -t\,dt + (1+t)\,dt \\ &= \left[\frac{-t^2}{2} + t + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \Big[t\Big]_0^1 = 1\end{aligned}$$

b) Aqui nós temos $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$ para $0 \le t \le \pi/2$. Logo, $dx = -\operatorname{sen} t dt$ e $dy = \cos t dt$ e, portanto:

$$\begin{aligned}\int_C y\,dx + (x+2y)\,dy &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t)\,dt + (\cos t + 2\operatorname{sen} t)\cos t\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(-\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 2\operatorname{sen} t \cos t\right) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos 2t + 2\operatorname{sen} t \cos t)\,dt = \left[\frac{\operatorname{sen} 2t}{2} + \operatorname{sen}^2 t\right]_0^{\pi/2} = 1\,.\end{aligned}$$

c) Temos $C = C_1 \cup C_2$ onde C_1 é o segmento de $(1,0)$ a $(1,1)$ e C_2 é o segmento de $(1,1)$ a $(0,1)$. Em C_1, $x = 1$ e $y = t$ com $0 \le t \le 1$ donde $dx = 0$ e $dy = dt$, e em C_2, $y = 1$ e $x = 1-t$ com $0 \le t \le 1$ donde $dy = 0$ e $dx = -dt$. Por propriedade de integral temos:

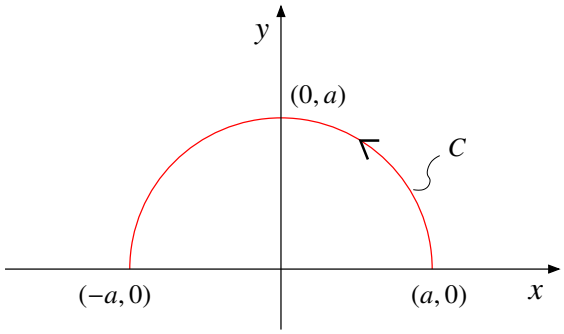
$$\begin{aligned}\int_C y\,dx + (x+2y)\,dy &= \int_{C_1} y\,dx + (x+2y)\,dy + \int_{C_2} y\,dx + (x+2y)\,dy = \int_0^1 (1+2t)\,dt + \int_0^1 (-dt) \\ &= \Big[t+t^2\Big]_0^1 - \Big[t\Big]_0^1 = 2-1 = 1\,.\end{aligned}$$

Exercício 2: Calcule os valores de $\int_C -2xy\,dx + \left(x^2+y^2\right)\,dy$ ao longo dos caminhos C

a) a parte superior da circunferência $x^2+y^2=a^2$ de $(a,0)$ a $(-a,0)$;

b) a parte superior da elipse $x^2+4y^2=2x$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: Temos o esboço na figura acima.



Uma parametrização de C orientada no sentido anti-horário é $\gamma(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t)$, com $0 \le t \le \pi$. Logo, $\gamma'(t) = (-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t)$, $0 \le t \le \pi$. Sendo $\vec{F}(x,y) = \left(-2xy, x^2+y^2\right)$, temos:

$$\begin{aligned}\vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) &= \vec{F}(a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t)\cdot(-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t)\\ &= (-2a\cos t a\,\mathrm{sen}\,t, \underbrace{a^2\cos^2 t + a^2\,\mathrm{sen}^2\,t}_{=a^2})\cdot(-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t) = 2a^3\cos t\,\mathrm{sen}^2\,t + a^3\cos t\,.\end{aligned}$$

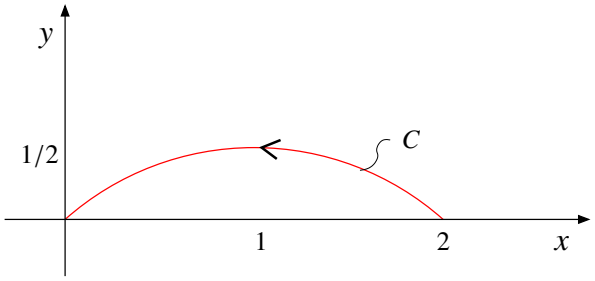
Como

$$I = \int_C -2xy\,dx + \left(x^2+y^2\right)dy = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

com $a=0$ e $b=\pi$ então:

$$I = \int_0^{\pi}\left(2a^3\cos t\,\mathrm{sen}^2\,t + a^3\cos t\right)dt = \left[2a^3\frac{\mathrm{sen}^3\,t}{3} + a^3\,\mathrm{sen}\,t\right]_0^{\pi} = 0\,.$$

b) De $x^2+4y^2=2x$, com $y\ge 0$ temos $(x-1)^2+4y^2=1$, com $y\ge 0$ ou $(x-1)^2+\frac{y^2}{1/4}=1$, com $y\ge 0$.



Uma parametrização de C é $\gamma(t) = \left(1+\cos t, \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,t\right)$, com $0 \le t \le \pi$. Logo, temos que $\gamma'(t) = \left(-\,\mathrm{sen}\,t, \frac{1}{2}\cos t\right)$ e

$$\begin{aligned}\vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) &= \vec{F}\left(1+\cos t, \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,t\right)\cdot\left(-\,\mathrm{sen}\,t, \tfrac{1}{2}\cos t\right)\\ &= \left(-2(1+\cos t)\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,t, (1+\cos t)^2 + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{sen}^2\,t\right)\cdot\left(-\,\mathrm{sen}\,t, \tfrac{1}{2}\cos t\right)\end{aligned}$$

$$= (1+\cos t)\,\mathrm{sen}^2 t + \frac{1}{2}(1 + 2\cos t + \underbrace{\cos^2 t}_{=\,1-\mathrm{sen}^2 t})\cos t + \frac{1}{8}\,\mathrm{sen}^2 t\cos t$$
$$= \mathrm{sen}^2 t + \mathrm{sen}^2 t\cos t + \frac{1}{2}\cos t + \cos^2 t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2 t\cos t + \frac{1}{8}\,\mathrm{sen}^2 t\cos t$$
$$= 1 + \frac{5}{8}\,\mathrm{sen}^2 t\cos t + \cos t.$$

Logo:

$$I = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^\pi \vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^\pi \left(1 + \frac{5}{8}\,\mathrm{sen}^2 t\cos t + \cos t\right)dt = \left[t + \frac{5}{8}\cdot\frac{\mathrm{sen}^3 t}{3} + \mathrm{sen}\, t\right]_0^\pi = \pi\,.$$

Exercício 3: Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ para deslocar uma partícula em linha reta do ponto $A(1,2)$ até $B(3,4)$.

Solução: Para calcular o trabalho, necessitamos de uma parametrização da trajetória C da partícula, que é o segmento de reta que une $P(1,2)$ a $Q(3,4)$:

$$\gamma(t) = P + t(Q-P) = (1,2) + t[(3,4)-(1,2)] = (1,2) + t(2,2) = (1+2t, 2+2t)$$

com $0 \le t \le 1$. Logo, $\gamma'(t) = (2,2)$. Portanto:

$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \vec{F}(1+2t, 2+2t)\cdot(2,2)\,dt$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+2t}, \frac{1}{2+2t}\right)\cdot(2,2)\,dt = \int_0^1 \left(\frac{2}{1+2t} + \frac{2}{2+2t}\right)dt = \Big[\ln(1+2t) + \ln(2+2t)\Big]_0^1$$
$$= (\ln 3 + \ln 4) - (\ln 1 + \ln 2) = \ln 3 + \ln 4 - \ln 2 = \ln\frac{3\cdot 4}{2} = \ln 6\ u.w.$$

Exercício 4: Determine o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x,y,z) = \left(y, x, z^2\right)$ para deslocar uma partícula ao longo da hélice C dada por $\gamma(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t, 2t)$, do ponto $A(2,0,0)$ ao ponto $B(2,0,4\pi)$.

Solução: Seja C a hélice dada por $\gamma(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t, 2t)$ do ponto $A(2,0,0)$ ao ponto $B(2,0,4\pi)$. Então o parâmetro t varia de 0 a 2π. O trabalho W é dada por:

$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

onde $a = 0$ e $b = 2\pi$ e

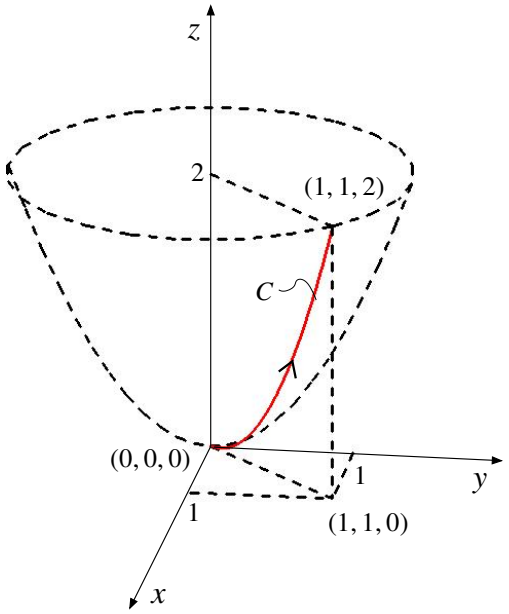
$$\vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = \vec{F}(2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t, 2t)\cdot\gamma'(t) = \left(2\,\mathrm{sen}\, t, 2\cos t, 4t^2\right)\cdot(-2\,\mathrm{sen}\, t, 2\cos t, 2)$$
$$= -4\,\mathrm{sen}^2 t + 4\cos^2 t + 8t^2 = 4\cos 2t + 8t^2\,.$$

Então:

$$W = \int_0^{2\pi} \left(4\cos 2t + 8t^2\right)dt = \left[4\cdot\frac{\mathrm{sen}\, 2t}{2} + \frac{8t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{64\pi^3}{3}\,u.w.$$

Exercício 5: Calcule a integral do campo vetorial $\vec{F} = \left(2xy, x^2, 3z\right)$ do ponto $A(0,0,0)$ ao ponto $B(1,1,2)$ ao longo da curva C interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $x = y$.

Solução: O esboço de C está representado na figura a seguir.

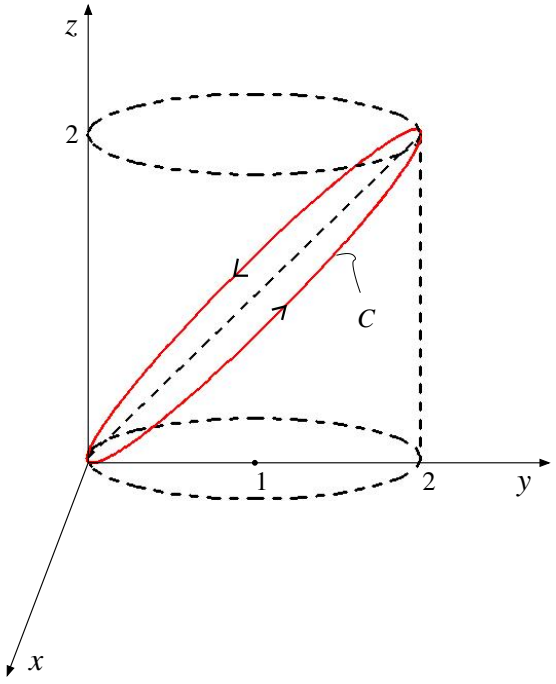


Uma parametrização de C é obtida fazendo $x = t$ donde $y = t$ e $z = t^2 + t^2 = 2t^2$, com $0 \leq t \leq 1$ pois C vai de $A(0,0,0)$ a $B(1,1,2)$. Temos então que $dx = dt$, $dy = dt$ e $dz = 4tdt$. Logo:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_C 2xy\,dx + x^2\,dy + 3z\,dz = \int_0^1 2t\cdot t\,dt + t^2\,dt + 3\cdot 2t^2\cdot 4t\,dt \\ &= \int_0^1 \left(2t^2 + t^2 + 24t^3\right)dt = \int_0^1 \left(3t^2 + 24t^3\right)dt = \left[t^3 + 6t^4\right]_0^1 = 1 + 6 = 7\,.\end{aligned}$$

Exercício 6: Calcule a integral do campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ ao longo da curva C interseção das superfícies $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e $z = y$ orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

Solução: De $x^2 + y^2 - 2y = 0$ temos $x^2 + (y-1)^2 = 1$, cujo gráfico no espaço é um cilindro circular.



Então C é a interseção do cilindro com o plano $z = y$, isto é, C é uma curva plana contida no plano $z = y$ e também está contida no cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Portanto, a sua projeção no plano xy é a base do cilindro. Como C está orientada no sentido anti-horário quando vista de cima (do eixo z positivo) então a sua projeção no plano xy que é a circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 1$ também está orientada no sentido anti-horário.

Assim, se $(x, y, z) \in C$ temos que x, y e z satisfazem às equações $x^2 + (y-1)^2 = 1$ e $z = y$. Logo, $x = \cos t$, $y = 1 + \operatorname{sen} t$, com $0 \le t \le 2\pi$ (no sentido anti-horário) e $z = y = 1 + \operatorname{sen} t$. Assim, temos $\gamma(t) = (\cos t, 1 + \operatorname{sen} t, 1 + \operatorname{sen} t)$, com $0 \le t \le 2\pi$. Logo $\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, \cos t)$. Temos então:

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\cos t, 1 + \operatorname{sen} t, 1 + \operatorname{sen} t) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos t, 1 + \operatorname{sen} t, 1 + \operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, \cos t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\cos t\ \operatorname{sen} t + \cos t + \operatorname{sen} t\ \cos t + \cos t + \operatorname{sen} t \cos t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (2\cos t + \operatorname{sen} t\ \cos t)\, dt = \left[2\operatorname{sen} t + \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} \right]_0^{2\pi} = (0+0) - (0+0) = 0\,.
\end{aligned}$$

Exercício 7: Sabe-se que o campo $\vec{F} = (e^{x+y} + 1)\,\vec{\mathbf{i}} + e^{x+y}\vec{\mathbf{j}}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2$.

a) Encontre uma função potencial para $\vec{F}$.

b) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde C é o arco de circunferência $(x-1)^2 + (y-1/2)^2 = 1/4$, com $x \ge 1$ que vai de $(1, 0)$ a $(1, 1)$.

Solução:

a) Vamos encontrar uma função potencial $\varphi(x, y)$ tal que, em $\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = e^{x+y} + 1 \quad (1)$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^{x+y}. \qquad (2)$$

Integrando (1) em relação a x temos:

$$\varphi(x, y) = \int (e^{x+y} + 1)\, dx = e^{x+y} + x + f(y) \quad (3)$$

onde $f(y)$ é uma "constante" de integração. Derivando (3) em relação a y e usando a igualdade (2):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^{x+y} + 0 + f'(y) = e^{x+y}$$

donde $f'(y) = 0$ ou $f(y) = c$, c constante. Obtemos a família de funções potenciais de $\vec{F}$:

$$\varphi(x, y) = e^{x+y} + x + c.$$

b) Fazendo $c = 0$ temos uma função potencial $\varphi(x, y) = e^{x+y} + x$. Logo, pelo teorema fundamental do cálculo para integrais de linha, temos:

$$\int_{(1,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(1, 1) - \varphi(1, 0) = \left(e^2 + 1\right) - (e + 1) = e^2 - e\,.$$

Exercício 8: Determine uma função potencial para cada campo conservativo.

a) $\vec{F}(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)\vec{\mathbf{i}} + 2xy\vec{\mathbf{j}}$.

b) $\vec{F}(x,y) = (\cos(xy) - xy\,\mathrm{sen}(xy))\vec{\mathbf{i}} - \left(x^2\,\mathrm{sen}(xy)\right)\vec{\mathbf{j}}$.

c) $\vec{F}(x,y,z) = \left(6xy^3 + 2z^2, 9x^2y^2, 4xz + 1\right)$

Solução:

a) Uma função potencial $\varphi(x,y)$ do campo $\vec{F} = (P,Q) = \left(x^2 + y^2, 2xy\right)$ é tal que domφ = = dom$\vec{F} = \mathbb{R}^2$ e $\nabla\varphi = \vec{F}$ em $\mathbb{R}^2$, isto é:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = P \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = Q \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = x^2 + y^2 & (1) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 2xy & (2) \end{cases}$$

em $\mathbb{R}^2$. Integrando (1) em relação a x temos:

$$\varphi(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + f(y) \qquad (3)$$

onde $f(y)$ é a "constante" de integração. Derivando a igualdade (3) em relação a y e usando a igualdade (2) obtemos

$$2xy + f'(y) = 2xy$$

ou $f'(y) = 0$ donde $f(y) = c$ onde c é uma constante. Substituindo em (3) vemos que:

$$\varphi(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + c$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ é a família de funções potenciais de $\vec{F}$.

b) Vamos encontrar uma função $\varphi(x,y)$ com D = dom$\vec{F} = \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \cos(xy) - xy\,\mathrm{sen}(xy) \quad (1) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= -x^2\,\mathrm{sen}(xy) \qquad (2) \end{aligned}$$

em $\mathbb{R}^2$. Integrando (2) em relação a y obtemos

$$\varphi(x,y) = x\cos(xy) + f(x) \qquad (3)$$

onde $f(x)$ é a "constante" de integração. Derivando (3) em relação a x e usando (1) encontramos:

$$\cos(xy) - xy\,\mathrm{sen}(xy) + f'(x) = \cos(xy) - xy\,\mathrm{sen}(xy)$$

ou $f'(x) = 0$ donde $f(x) = c$ onde c é uma constante. Assim, a família de funções potenciais de $\vec{F}$ é dada por

$$\varphi(x, y) = x\cos(xy) + c\,.$$

c) Queremos encontrar uma função $\varphi(x, y, z)$ com $D = \text{dom}\vec{F} = \mathbb{R}^3$ tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 6xy^3 + 2z^2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 9x^2y^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 4xz + 1 \quad (3)$$

em $\mathbb{R}^3$. Integrando (1) em relação a x temos

$$\varphi(x, y, z) = \int \left(6xy^3 + 2z^2\right) dx = 3x^2y^3 + 2xz^2 + f(y, z) \quad (4)$$

onde $f(y, z)$ é uma "constante" de integração. Derivando (4) em relação a y e z e usando (2) e (3), respectivamente, temos:

$$\begin{array}{ll} 9x^2y^2 + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 9x^2y^2 & \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \text{ou} & \\ 4xz + \dfrac{\partial f}{\partial z} = 4xz + 1 & \dfrac{\partial f}{\partial z} = 1 \end{array}$$

donde $f(y, z) = z + c$, c constante. Substituindo em (4) vemos que o conjunto de todas as funções potenciais é dado por:

$$\varphi(x, y, z) = 3x^2y^3 + 2xz^2 + z + c\,.$$